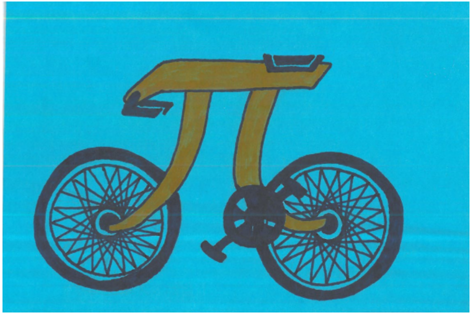
Die Suche nach π

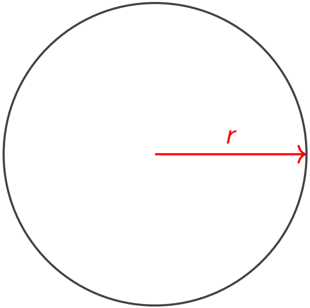
Vortrag zum Pi Day im Computermuseum

Jan Köllner

3-14-2023

Universität Stuttgart
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung (IADM)





U … Kreisumfang
A … Kreisfläche
$d = 2r$ … Durchmesser

Aus

$$U = \pi d = 2\pi r \qquad A = \pi r^2$$

erhalten wir zwei mögliche Definitionen:

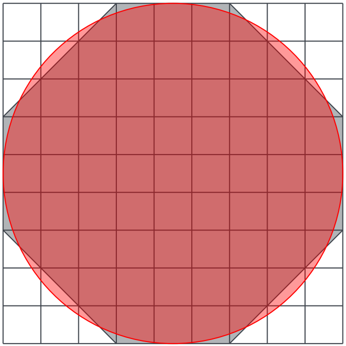
$$\pi = \frac{U}{d} = \frac{U}{2r}$$

$$\pi = \frac{A}{r^2}$$

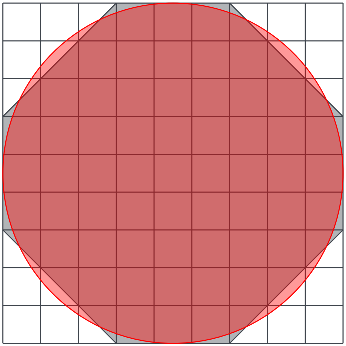
The British Museum, Collection Online, EA10058
The Rhind Mathematical Papyrus

Papyrus Rhind

Die Fläche eines Kreises mit Durchmesser 9 entspricht der Fläche eines Quadrats mit Seitenlänge 8.



$63 \approx 64$ Quadrate



$63 \approx 64$ Quadrate

Die Fläche eines Kreises mit Durchmesser 9 entspricht der Fläche eines Quadrats mit Seitenlänge 8.

Für π erhält man daraus:

$$\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2$$

bzw. $\pi = 8^2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 = 64 \cdot \frac{4}{81} = \frac{256}{81} \approx 3,160$

Es ist

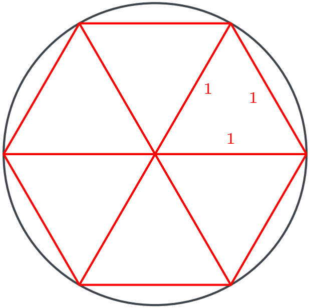
$$\text{Umfang}_{\odot} > 6 \cdot \text{Kante}_{\triangle}$$

also

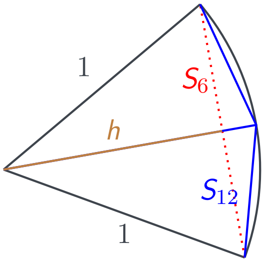
$$2 \cdot \pi > 6$$

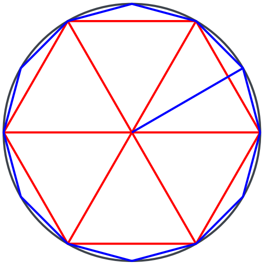
bzw.

$$\pi > 3$$

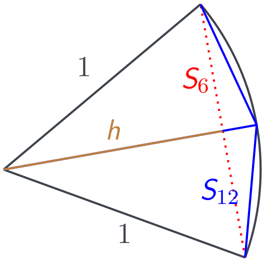


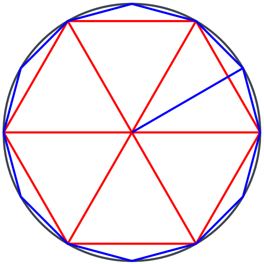
Rekursion nach Archimedes





Rekursion nach Archimedes



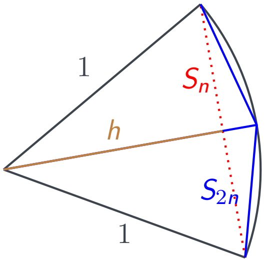


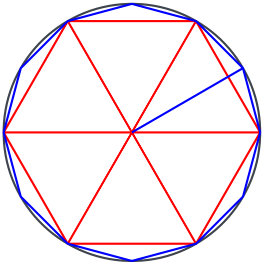
$$h^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad h = \sqrt{1 - \left(\frac{S_6}{2}\right)^2}$$

$$(1-h)^2 = 1 - 2h + h^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{S_6}{2}\right)^2} - \left(\frac{S_6}{2}\right)^2$$

$$S_{12}^2 = (1-h)^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{S_6}{2}\right)^2}$$

Rekursion nach Archimedes





$$h^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 = 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad h = \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$$

$$(1-h)^2 = 1 - 2h + h^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2} - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2$$

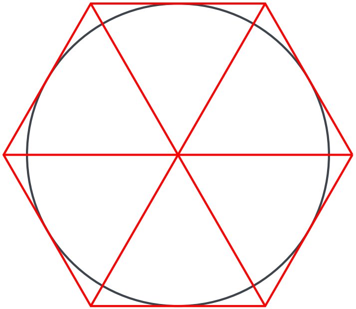
$$S_{2n}^2 = (1-h)^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$$

Rekursionsvorschrift

$$S_6 = 1, \qquad S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

Genauso:

$$T_6 = \frac{2}{\sqrt{3}},$$
$$T_{2n} = \frac{\sqrt{16 + 4T_n^2} - 4}{T_n}$$



Damit:

$$n \cdot S_n < 2\pi < n \cdot T_n$$

Damit:

$$n \cdot S_n < 2\pi < n \cdot T_n$$

Ecken	inneres n-Eck	äußeres n-Eck
6	3.00000000	3.46410162
12	3.10582854	3.21539031
24	3.13262861	3.15965994
48	3.13935020	3.14608622
96	3.14103195	3.14271460
192	3.14145247	3.14187305
384	3.14155761	3.14166275
768	3.14158389	3.14161018
1536	3.14159046	3.14159703

Tafel der Fleißigen:

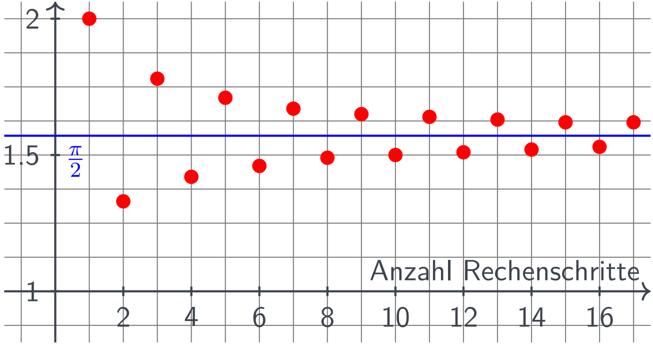
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	96 Ecken	3 Stellen
Liu Hui	nach 263	3072 Ecken	6 Stellen
Zu Chongzh	ca. 480	$3 \cdot 2^{12}$ Ecken	7 Stellen
Dschamshid Mas'ud al Kashi	1424	$3 \cdot 2^{28}$ Ecken	16 Stellen
Ludolph van Ceulen	1610	2^{62} Ecken	35 Stellen

John Wallis (1655):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

John Wallis (1655):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

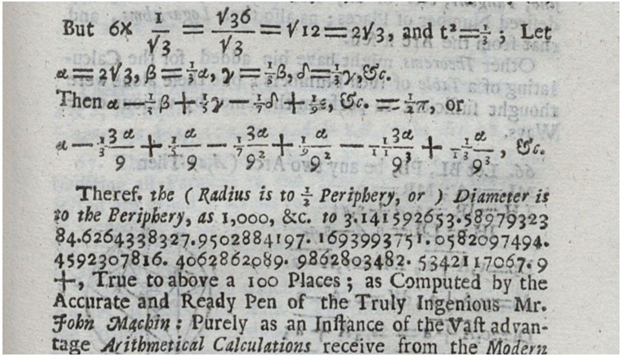


Multipliziert man die ersten 100 Brüche, erhält man nicht einmal die ersten 2 Stellen!

William Jones: Für $\alpha = 2\sqrt{3}$ ist

$$\pi = \alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}\cdots$$

lieferte π in 1706 auf 100 Stellen:



But $6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, and $t^2 = \frac{1}{3}$; Let $\alpha = 2\sqrt{3}$, $\beta = \frac{1}{3}\alpha$, $\gamma = \frac{1}{3}\beta$, $\delta = \frac{1}{3}\gamma$, &c.

Then $\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{5}\gamma - \frac{1}{7}\delta + \frac{1}{9}\varepsilon$, &c. $= \frac{1}{2}\pi$, or

$$\alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}, \text{ \&c.}$$

Theref. *the* (*Radius is to* $\frac{1}{2}$ *Periphery, or*) *Diameter is to the Periphery, as* 1,000, &c. *to* 3.14159265358979323 84.6264338327.9502884197.1693993751.0582097494. 4592307816. 4062862089. 9862803482. 5342117067.9 +, True to above a 100 Places; as Computed by the Accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr. *John Machin*: Purely as an Inſtance of the Vaſt advantage *Arithmetical Calculations* receive from the *Modern*

William Jones: Synopsis Palmariorum Matheseos, S. 243. In: Göttinger Digitalisierungszentrum.

Es ist

$$\arctan x = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \dots$$

und $\arctan 1 = \pi/4$. Damit

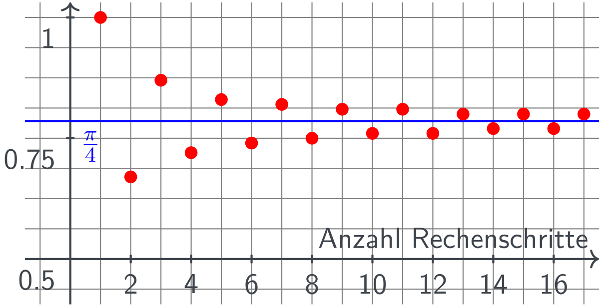
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \dots$$

Es ist

$$\arctan x = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \ldots$$

und $\arctan 1 = \pi/4$. Damit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \ldots$$

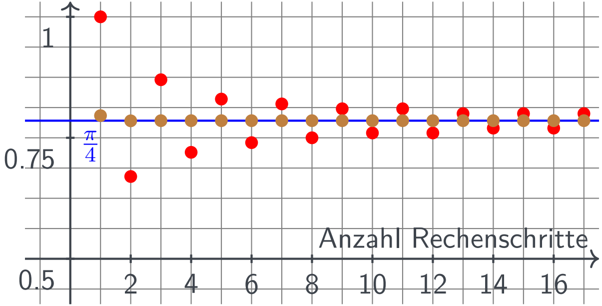


Es ist

$$\arctan x = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \dots$$

Bessere Idee von John Machin (1706):

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$



Es ist

$$\arctan x = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \dots$$

Bessere Idee von John Machin (1706):

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

lieferte π ebenfalls in 1706 auf ebenfalls 100 Stellen.

Mit der gleichen Formel: William Shanks berechnet 1873 π auf

707 Stellen

Es ist

$$\arctan x = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \dots$$

Bessere Idee von John Machin (1706):

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

lieferte π ebenfalls in 1706 auf ebenfalls 100 Stellen.

Mit der gleichen Formel: William Shanks berechnet 1873 π auf

~~707 Stellen~~ 527 Stellen da Rechenfehler

Ramanujan (1910):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

Liefert π auf 17 Millionen Stellen (Gospa in 1985).

Ramanujan (1910):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

Liefert π auf 17 Millionen Stellen (Gospa in 1985).

David und Gregory Chudnovsky (1988):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!\,(13591409 + 545140134k)}{(3k)!\,(k!)^3\, 640320^{3k+3/2}}$$

Verwendet in allen Weltrekorden ab 2010.
(Aktuell Emma Haruka Iwao: 100.000.000.000.000 Stellen in 158 Tagen mit y-cruncher, Veröffentlicht 21.03.2022)

Direkte Berechnung einzelner Stellen von π

Nachkommastellen von π:

$$\begin{aligned}\pi &= 3{,}1415926\ldots \\ &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \ldots\end{aligned}$$

Direkte Berechnung einzelner Stellen von π

Nachkommastellen von π:

$$\begin{aligned} \pi &= 3,1415926\dots \\ &= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \dots \end{aligned}$$

Problem: Wir wollen z.B. die 5. Nachkommstelle von π ausrechnen:

$$\begin{aligned} \pi &= 3,1415926\dots && \mid \cdot 10^4 \\ 10^4\pi &= 31415,926\dots && \mid \pmod 1 \\ 10^4\pi \mod 1 &= 0,926\dots && \mid \cdot 10 \\ 10\cdot(10^4\pi \mod 1) &= 9,26\dots && \mid \lfloor\dots\rfloor \\ \lfloor 10\cdot(10^4\pi \mod 1)\rfloor &= 9 \end{aligned}$$

Idee: Finde ein Verfahren womit man $10^4\pi$ einfach berechnen kann.

Z.B. Bailey-Borwein-Plouffe-Formel:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Mit 16^k kann man gut multiplizieren, liefert π also in Hexadezimalsystem:

$$\pi = 3 + \frac{2}{16} + \frac{4}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \frac{F}{16^4} + \frac{6}{16^5} + \frac{A}{16^6} + \dots$$

Wird seit 2010 verwendet um Weltrekorde zu überprüfen!

Warum das ganze?

- Für technische Anwendungen nicht nötig!
  35 Stellen von π sind genug, um den Umfang der Milchstraße bis auf einen Fehler in der Größe eines Protons zu berechnen.

Warum das ganze?

- Für technische Anwendungen nicht nötig!
  35 Stellen von π sind genug, um den Umfang der Milchstraße bis auf einen Fehler in der Größe eines Protons zu berechnen.
- Guter Test für Computer!
  1986 hat ein π-Programm einen Fehler in einem der ersten Cray-2-Supercomputer entdeckt.

Warum das ganze?

- Für technische Anwendungen nicht nötig!
  35 Stellen von π sind genug, um den Umfang der Milchstraße bis auf einen Fehler in der Größe eines Protons zu berechnen.
- Guter Test für Computer!
  1986 hat ein π-Programm einen Fehler in einem der ersten Cray-2-Supercomputer entdeckt.
- Geht einher mit der Entwicklung der Mathematik an sich.

Warum das ganze?

- Für technische Anwendungen nicht nötig!
  35 Stellen von π sind genug, um den Umfang der Milchstraße bis auf einen Fehler in der Größe eines Protons zu berechnen.
- Guter Test für Computer!
  1986 hat ein π-Programm einen Fehler in einem der ersten Cray-2-Supercomputer entdeckt.
- Geht einher mit der Entwicklung der Mathematik an sich.
- **Aber am Wichtigsten:**

Die Herausforderung ist da!

Literatur

[1] D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein, and S. Plouffe, *The quest for pi*, Math. Intelligencer **19** (1997), no. 1, 50–57, DOI 10.1007/BF03024340. MR1439159

[2] G. Donald Allen, *Approximating PI: Pedagogy and Content in Middle and High School Mathematics* (G. Donald Allen and Amanda Ross, eds.), SensePublishers, Rotterdam, 2017.

[3] Eugene Salamin, *Computation of π using arithmetic-geometric mean*, Math. Comp. **30** (1976), no. 135, 565–570, DOI 10.2307/2005327. MR404124

[4] Kurt Vogel, *Vorgeschichte und Ägypten*, Vorgriechische Mathematik, vol. 1, Schroedel, Hannover, 1958 (Deutsch).